On the Efficiency of Learning Machine

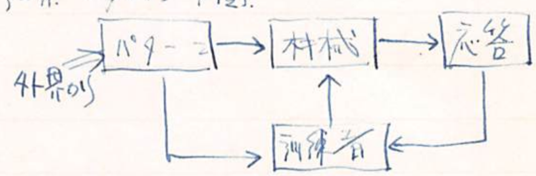
アインスウース

- Abstract

- I. introduction

  - 適応系の構造は次の2点で興味ある
    ① 制御系に示された学習過程の理解 ——→ ~~モデル~~
    ② 特別な仕事を成すための訓練可能な機械作成
    ①のモデルとして、Uttley の条件確率計算機, Rosenblatte のパーセプトロン
    ②の方では、Widrow の adaline neuron, Steinbuch の学習 matrix

  - これらの系の多くは下図.



トレーナーは機械が望ましい応答をするようになるまで機械に信号を送りつづける.

  - トレーナーは現在の応答の望ましさについてだけ機械と連絡できると考える
    この条件のもとで送った情報量と受けとったそれを決定する方法が導かれ.
    かくして、学習過程の効率の尺度が定義される

  - この考えは、はじめに抽象的学習機械に、次に、コンピューターでシミュレーションできるニューロン類似素子からなる機械に適用された

- II. quantity of information

Wiener - Shannon によれば

情報量 $H = -\sum_i P_i \log_2 P_i$ (1)

P_i; あるパターンに対して i番目の応答の起こる Prob.

今、機械が M個の応答の1つをとるとして、また初期にすべて等しいとすると
正しい応答を発見したときに得られる情報は

$$H = -\sum_i \frac{1}{m} \log \frac{1}{m} = \log_2 m \quad (2)$$

- これが尺度として適当であることは次のことでわかる

すなわち、パターンはm個の応答の1つをとり、望ましい応答は答がyesかnoであるような問をして見つけなければいけない…

もし応答がx個の等しい群に分けられ、かつそのおのおのから、これが望ましい応答を含んでいるかどうか答えられるとすれば、それは、望ましい応答を含んでいる群が鑑別される前に平均$\frac{x}{2}$個の問をとるだろう。

x個の群すべてに問えば必ずわかるが、確率では$\frac{x}{2}$個の問でわかる。

もし過程がこの群において望ましい応答が鑑別されるまで繰返されるならば、問の数は平均で

$$N = \frac{x \log m}{2 \log x} \qquad (3)$$

∵) m個の応答をx個の分けることをn回やったとき1つの群に1個になったとする

$$m \times \left(\frac{1}{x}\right)^n = 1 \longrightarrow n = \frac{\log m}{\log x}$$

1回で平均$\frac{x}{2}$の問だから、全体で

$$N = \frac{x}{2} \times n = \frac{x}{2} \cdot \frac{\log m}{\log x} \qquad \frac{dN}{dx} = \frac{\log m}{2}\left\{\frac{\log x - 1}{(\log x)^2}\right\}$$

- $x=e$でN最小。

しかしxは整数。従って$x=2$か3。

$x=2$とすると $N = \log_2 m$ (4)

- そこで(1)式の情報量は、望ましい応答を決定するために問われる問の数の平均と同一視される

- もしキカイがl個の独立なパターンに対する応答を与えられたら、受けとる情報量は

$$H = l \log_2 m \qquad (5)$$

- (

望ましい~~情報~~応答をするキカイの確率を$P(t)$とすると

(t番目の試みで) 伝達される情報は

$$H(t) = -P(t)\log_2 P(t) - \{1-P(t)\}\log_2\{1-P(t)\} \qquad (6)$$

。$P(t)$の測定に困難あり
確率は普通、2つの場合に求められる
1). 先験確率が知られているとき.
2) 系がエルゴード性をもつとき
$P(x_2, t_2 / x_1, t_1)$ が $t_2 \to \infty$ で $P(x_2, t_2)$ になること.
引て確率は生起のひん度から概算できる.
しかし. 学習キカイでは 先験Prob. は 学習過程の初めでだけ知られており. 系は明らかに. エルゴード的でない。

。この困難を出し抜くために 次の手順が導かれる。
評価(計算)は 要求された応答をキカイが与える場合の数から作られる
そこで t 回の試みの後に $S(t)$ を導入.
↑正答数

$$\frac{dS(t)}{dt} = P(t)$$ とする.

。これは 確率のもつべき特性のほとんどをもっている.
それはいつも 0と1の間でなければならないし. $S(t)$ がある領域で直線になれば $P(t)$ は 確率のひん度(による)定義によって与えられたものと同じになるだろう。

。学習キカイによる伝送及び受信の情報量を定めたので.
学習過程の効率は 次に定義される

$$\eta = \frac{\text{学習した 〃 (受けとった)}}{\text{入ってきた情報量 (送された)}} = \frac{l \log_2 m}{\sum_{t=1}^{\infty} H(t)} \qquad (7)$$

$P(t)$ が 1 になったとき 学習は完成, trainer からの情報は 0 になる
∵) t回の試みで t回の正答なら $S(t) = \cancel{t} \Rightarrow P(t) = 1$
〃 $t - a$

III. ランダムな学習機械

キカイはランダムな応答をするが、トレーナーから正解という信号がくると、以後は常に正答をする。

このふるまいはマルコフ過程によって表される。t回目の試行で正答を得るProb $P_1(t)$ は

$$\begin{bmatrix} P_1(t) \\ 1-P_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{m} \\ 0 & \frac{m-1}{m} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ \frac{m-1}{m} \end{bmatrix}$$

$$P_1(t) = 1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^{t+1}$$ t回目までに正答のみつかるProb.

○ もしキカイがランダム(ならび順序)で与えられた l ケの入力パターンに対する特定の応答を学習することを要求されているとする、正答のProb.は（t回目の試みで）

$$P(t) = 1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^{t/l+1}$$

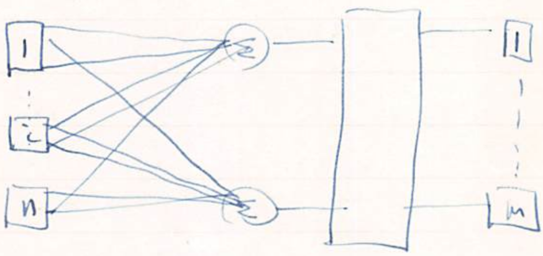
○ 1組10ケの入力パターンで訓練される10ケの応答をもつキカイでは、ηは約15%である。

・しかし、$P(t)$を計算する解析的方法がなかったらどうだろうか。
系の効率は、キカイを組立てて、概算で$P(t)$を測定することによって、図式的に見つけられるだろう。
2図はこのような過程の結果を示しており、$P(t)$曲線はそれから得られた。
この方法はだいたい同じ値の効率を与える。

IV. An adaptive neuron Machine

- 前述は学習過程の効率を評価する経験的方法をいくらか論じる。この方法を次に、ニューロン素子のマシンに適用しよう。

- Iで言ったような行為~~を学~~の訓練可能な簡単なマシンは Fig. 3 である



環境を $U_k = U_k(u_i \cdots u_n)$. $k = 1, l$, $u_i = 1$ or 0
l個の vector で表す

- 機械は n 入力 channel をもつ。おのおのは、2つの経路で m個のニューロンのおのおのと接続されている。ith 入力から jth ニューロンへの接続経路は重み w_{ij}, $\bar{w}_{ij}$ をもつ, ith 入力から jth ニューロンへの信号は

$$v_{ij} = u_i w_{ij} + (1-u_i)\bar{w}_{ij}$$

jth ニューロンでの信号の和は

$$V_j = \sum_i u_i w_{ij} + \sum_i (1-u_i)\bar{w}_{ij}$$

ニューロン間は、最も大きい信号を受けとったものだけが出力信号を出すようになっている。
そこで機械の出力は、もし jth が最大なら $\bar{V}_k = \bar{V}_k(\bar{v}_1 \cdots \bar{v}_m)$ ($\bar{v}_j = 1$ 他は 0)

- 重み値の調節によって、少なくとも m個のパターンが訓練者の望ましい応答をするようになることは十分可能である。しかし仕事の状態はトレーナーからの信号により自動的に変わることが要求される。
t th 試行に対するトレーナの信号 $Z(t)$ は、正答のとき +1、他は −1 とする
重み変化のルールは

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + Z(t)\, u_i\, \Delta w \left(\bar{v}_j - 1/m\right) \qquad (13)$$

換言すれば
正答のとき
出力信号を選んだchannelの重みは $+\Delta w \frac{m-1}{m}$
他は $-\frac{1}{m}\Delta w$
誤答のとき
正答のときと符号逆。

○ 使用された訓練手順はFig 4に示す。

○ 初め、重みは $w_2 \le w_{ij} \le w_1$ の制限内で ~~ランダムに~~ 一様に分布した値をランダムにsetしていた。
相像では入力パターンとして初めに使用できうる 2^nケのパターン集合からランダムにlケが選ばれた。

○ 初めのパターンが選ばれ、キカイに与えられ、応答が得られた。それから重みは(13)式に従って調整された。
正答まで繰返され、次に新しいパターンでまたくりかえされた
この手順は$2l$ケの正答の系列が得られるまで続いた。

○ Fig 5は10入力、10ニューロンをもつ、キカイの、前の操作順で訓練したときの学習曲線である。重み制限は1000～0、Δwの値はパラメータで示す。

○ ベストの$\Delta w = 50$のとき $\eta = 25\%$

V. Reinforcement Rules

○ η は Δw による。Δw は小さすぎても大きすぎてもダメ

○ 正答のときの増加分 Δw_+
(誤答)に対応する減少分 Δw_- とする。
もし Δw_+ が大きすぎるとすべてのパターンが強化されたものと同じ応答をする傾向をもつ。これをさけるため

$$\Delta w_+ \leq \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\bar{d}}{n-\bar{d}} \cdot \frac{w_1 - w_2}{2} \quad (14)$$

(n 入力, m 出力系で)

$\bar{d}$: ハミング距離, 最小値は 1
最小

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ $x_i, y_i = 0$ or 1
$y = (y_1, \ldots, y_n)$
$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

○ $$\Delta w_- \geq \frac{m}{m-1} \frac{\bar{d}}{n} \frac{w_1 - w_2}{2} \quad (15)$$

○ $1 \leq \bar{d} \leq \frac{n}{2}$ なので $\Delta w_+ = \Delta w_-$ を (14), (15) 内で選びうる。

○ Fig 6 は ~~せ~~ δw の値の変化とすべて正答をまちがいなくするのに要する試行回数である。ばらつきは初めの重みによる。一部は選ばれたパターンに合うが他はダメ。しかし前の等式で与えられた値のは、適応期間が最短の傾向は明白だ。

○ この強化ルールは最適化だが唯1ではない...
(a方法)
増加分が重みに無関係でなく比例させると
$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t)\{1 + Z(t)\, U_i\, \delta w\, (U_j - \frac{1}{m})\}$ (16)

これでやっても (13) 使用のときとあまり違わない
Fig 7 に完全に正答するまでの試行回数と Δw の関係示す
Δw 小さいと良く
大きいと不規則。

VI. 入力と出力の数

ηは入力と出力の数の関数

~~ηは入力数~~

Fig 8 は η − 入力数

- 入力数 $\uparrow \Longrightarrow \eta \downarrow$

∵ もし n 入力なら 2^n ケのパターンから l ケ選ぶならば

与えられたパターンからのハミング距離 r により異なる, もっともありうるパターンの数は

$$N(r) = \frac{l\,n!}{2^n (n-r)!\,r!} \quad (17)$$

rの最小値はそれでは $N(r) \fallingdotseq 1$ だが, 平均最小距離 $\bar{r}$ である.

もし n は増加し l は定数ならば $\bar{r}$ は 1 より大きくなる。しかし

個別のパターン対の距離が 1 でありうる。それで, ________ なので

妥協的値が選ばれねばならない

$n \uparrow \Longrightarrow \Delta w$ の範囲 $\uparrow$ かつ $\eta \downarrow$

- ニューロン数 $\uparrow \Rightarrow \eta \downarrow$

∵ $m \uparrow$ につれて (Section II) 2つから1つ選ぶ最適方法からだんだん異なる割,

m ケから1つ選ぶので この結果は予期できる

η はいつも ランダム学習者より大きい (Fig 8)

VII パターン表示順序.

IVではパターン表示の順序を論じていない。特に興味あるものにパターンがランダムな順で与えられる手順がある。この場合の異った制限は ΔW_+ と ΔW_- にある

○ t_0時での jth ニューロンのシグナルの合計は $y_j(t_0)$
期間tでの試みに対する $y_j(t_0)$ の変化

$$\Delta \underline{y}_j = \frac{y_j(t+t_0) - y_j(t_0)}{t}$$

○ jth ニューロンが正答であるProb は P_j
いかなる試行でも系が全く正答するProb. は p.

$$\Delta \underline{y}_j = \frac{n}{m}\left(P_j \Delta W_+ - (1-P_j)\,\Delta W_-\right) - (n-d)\left(p\frac{\Delta W_+}{m} - (1-p)\frac{\Delta W_-}{m}\right)$$

d: パターン間の平均距離で n大のとき $d = \frac{n}{2}$

○ すべての p_j が p に等しくなりえて.

$$\Delta \underline{y}_j = \frac{n}{2m}\left(p\Delta W_+ - (1-p)\Delta W_-\right)$$

○ $\Delta y_j = 0$ のとき. 系は改善されなくなる

$$\Downarrow\quad p = \frac{\Delta W_-}{\Delta W_+ + \Delta W_-} \qquad (21)$$

換言すれば (21) の Prob. で系は正答をつくりはじめる
Fig. 9 参照.
長い訓練列後に正答する Prob. は $\frac{\Delta W_-}{\Delta W_+}$ の関数である.
最終的にはどんな場合も (21) 式より高い。しかし. 完全なものにしたいなら $\Delta W_+ = 0$ にする必要がある。

$\Delta W_+ = 0$ で $p = 1$.

- もう一つの訓練列は、固定した順で連続的にパターンを与える。
しかし、この~~新拡~~手順で確実に正確に正答を学習させる方法はない。
入力の周期的性質が、重みのいくつかの値が、正答に向って収束しないで循環的に変化することを引き起すということがある。

VIII 結論

ここで定義した η は多くの目的につかえる。

①
$\eta \leq 100\%$ なので系が与えられた情報量を吸収する最小期間の評価を与える。

② 異った学習系の量的比較を可能にする。

③ 適応系の設計者が最大にすべき量を決定する。