

資料 June 26 '90

大學院論文輸訂

FUSS

No. 2

学習機械について

Fuzzy Automata

中戸司 （ちゆうどじ） [chitudoji] 1 = a town or city in Japan. 2 = a town or city in the U.S.A. 3 = a town or city in Australia. 4 = a town or city in South Africa. 5 = a town or city in Canada. 6 = a town or city in New Zealand. 7 = a town or city in the U.K. 8 = a town or city in the U.S.S.R. 9 = a town or city in France. 10 = a town or city in Germany. 11 = a town or city in Italy. 12 = a town or city in Spain. 13 = a town or city in Portugal. 14 = a town or city in Greece. 15 = a town or city in Turkey. 16 = a town or city in Egypt. 17 = a town or city in Libya. 18 = a town or city in Sudan. 19 = a town or city in Iraq. 20 = a town or city in Iran. 21 = a town or city in Pakistan. 22 = a town or city in India. 23 = a town or city in Nepal. 24 = a town or city in China. 25 = a town or city in Mongolia. 26 = a town or city in North Korea. 27 = a town or city in South Korea. 28 = a town or city in Thailand. 29 = a town or city in Laos. 30 = a town or city in Cambodia. 31 = a town or city in Vietnam. 32 = a town or city in Indonesia. 33 = a town or city in Malaysia. 34 = a town or city in Singapore. 35 = a town or city in Brunei. 36 = a town or city in the Philippines. 37 = a town or city in Thailand. 38 = a town or city in Laos. 39 = a town or city in Cambodia. 40 = a town or city in Vietnam. 41 = a town or city in Indonesia. 42 = a town or city in Malaysia. 43 = a town or city in Singapore. 44 = a town or city in Brunei. 45 = a town or city in Thailand. 46 = a town or city in Laos. 47 = a town or city in Cambodia. 48 = a town or city in Vietnam. 49 = a town or city in Indonesia. 50 = a town or city in Malaysia. 51 = a town or city in Singapore. 52 = a town or city in Brunei. 53 = a town or city in Thailand. 54 = a town or city in Laos. 55 = a town or city in Cambodia. 56 = a town or city in Vietnam. 57 = a town or city in Indonesia. 58 = a town or city in Malaysia. 59 = a town or city in Singapore. 60 = a town or city in Brunei. 61 = a town or city in Thailand. 62 = a town or city in Laos. 63 = a town or city in Cambodia. 64 = a town or city in Vietnam. 65 = a town or city in Indonesia. 66 = a town or city in Malaysia. 67 = a town or city in Singapore. 68 = a town or city in Brunei. 69 = a town or city in Thailand. 70 = a town or city in Laos. 71 = a town or city in Cambodia. 72 = a town or city in Vietnam. 73 = a town or city in Indonesia. 74 = a town or city in Malaysia. 75 = a town or city in Singapore. 76 = a town or city in Brunei. 77 = a town or city in Thailand. 78 = a town or city in Laos. 79 = a town or city in Cambodia. 80 = a town or city in Vietnam. 81 = a town or city in Indonesia. 82 = a town or city in Malaysia. 83 = a town or city in Singapore. 84 = a town or city in Brunei. 85 = a town or city in Thailand. 86 = a town or city in Laos. 87 = a town or city in Cambodia. 88 = a town or city in Vietnam. 89 = a town or city in Indonesia. 90 = a town or city in Malaysia. 91 = a town or city in Singapore. 92 = a town or city in Brunei. 93 = a town or city in Thailand. 94 = a town or city in Laos. 95 = a town or city in Cambodia. 96 = a town or city in Vietnam. 97 = a town or city in Indonesia. 98 = a town or city in Malaysia. 99 = a town or city in Singapore. 100 = a town or city in Brunei.

齊藤(正)研 M虫 中所武司

齊藤(正)研

M ⑩

中戸武司

目

次

1. はじめに	1
2. fuzzy 集合	1
3. fuzzy アルゴリズム	4
4. fuzzy 算法と応用	6
4.1 fuzzy オートマトン	6
4.2 学習システムへの応用	8
4.3 パターン識別への応用	10
5. おわりに	12

参考文献

1. はじめに

我々の世界にある物々や状態は、それがあるクラスに属するか否かを判定する基準が明確には定まっていな^い場合がしばしばある。例えば「美人」、「右翼」、「大きな数」などがある。これらは明らかに通常の数学的な意味における集合を構成していない。しかしながら、そのように不正確に定義された概念は、人間の思考に関するもの、とりわけ、人工知能、パターン認識、情報処理などに重要な役割を果している。^[2]

そこで、カリフォルニア大学の Sadeh は、1965 年に、membership 関数なるものを導入して、定義のあいまいな概念を量的に特徴づける fuzzy 集合を提案し、理論を展開した。^[3]

その後二の考え方は、多方面で応用されつつあるが、本講義では、特に、Wee and Fu の論文^[3]を中心^に、fuzzy 集合の、学習系への応用について考えてみたい。

2. fuzzy 集合^[4]

空間 $X = \{x\}$ における fuzzy 集合 A とは、 X の中の各点 x を、区間 $[0, 1]$ の中の実数に対応づける membership 関数 $f_A(x)$ によって、特徴づけら

れる集合のことである。従って $f_A(x)$ が 1 に近ければ、 x は A に属する度合が強く、0 に近いときはその度合が弱いことになる。

(例)

X をすべての実数の集合、 A を 1 よりも非常に大きな数の fuzzy 集合とするとき、 $f_A(x)$ を次のようなものと考えることができる。

$$f_A(0) = 0, f_A(1) = 0, f_A(5) = 0.01, f_A(10) = 0.2$$

$$f_A(100) = 0.95, f_A(500) = 1 \text{ etc} \quad (\text{例終})$$

さて、ここで普通の集合における定義に対応して、いくつかの事柄について、fuzzy 集合における定義を示しておく。

① $\forall x \in X, f_A(x) = f_B(x)$ の時に fuzzy 集合 A と B は等価であるといふ、 $A = B$ で表わす。

② fuzzy 集合 A の補集合 A' は $f_{A'} = 1 - f_A$ で定義される。

③ $\forall x \in X, f_A(x) = 0$ の時、fuzzy 集合 A は空集合中である

④ $\forall x \in X, f_A(x) \leq f_B(x)$ の時、 A は B を含まるという。

⑤ $A \times B$ の和集合を C とすると $f_C(x) = \max [f_A(x), f_B(x)]$ 。

⑥ $A \times B$ の積集合を C とすると $f_C(x) = \min [f_A(x), f_B(x)]$ 。

⑦ $A \cap B = \emptyset$ ならば、 $A \times B$ は互いに素であるといふ。

上で定義した和、積、補集合の演算に関する限り、普通の集合の場合と同じように、いくつかの基本的な性質をもつてゐる。一例としては、

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{ド・モルガーンの法則}$$

$$C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B) \quad \text{分配律}$$

があり、これらの意味は、定義から

$$1 - \max[f_A, f_B] = \min[1-f_A, 1-f_B]$$

$$\max[f_C, \min(f_A, f_B)] = \min[\max(f_C, f_A), \max(f_C, f_B)]$$

である。

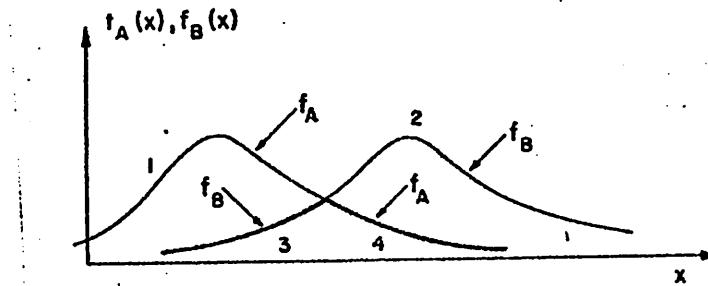


図1 Illustration of the union and intersection of fuzzy sets in R^1

fuzzy集合に関する演算としては、上述の他に、代数積、代数和、絶対差が、それぞれ $f_{AB} = f_A f_B$, $f_{A+B} = f_A + f_B$, $f_{|A-B|} = |f_A - f_B|$ で定義される。代数和は $\forall x \in X, f_A(x) + f_B(x) \leq 1$ の条件のもとでだけ可能である。

次に fuzzy集合を応用（例えば、後に述べる Fuzzyオートマトン）する上で重要な役割を果す fuzzy関係について見てみよう。空間 X における fuzzy関係とは、積空間 $X \times X$ における fuzzy集合 A のことで、membership関数 $f_A(x, y); x, y \in X$ によって特徴づけられる。

(例)

X をすべての実数の集合とし、 $x, y \in X$ として、

$x \gg y$ なる fuzzy 関係を $X \times X$ における fuzzy 集合 A とすると、 $f_A(x, y)$ を次のように考えることがで“きる。

$f_A(10, 5) = 0$, $f_A(100, 10) = 0.7$, $f_A(100, 1) = 1$, etc
(例経)

更に一般化すれば、空間 X における (n) fuzzy 関係とは、積空間 $X \times X \times \cdots \times X$ における fuzzy 集合 A のことで、membership 関数 $f_A(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in X$ によって特徴づけられる。

また、 X における 2 つの fuzzy 関係 A, B の合成とは、 $A \circ B$ で表され、次のような membership 関数をもつ fuzzy 関係である。

$$f_{A \circ B}(x, y) = \sup_v \min [f_A(x, v), f_B(v, y)]$$

この場合、結合の法則が成立するので

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$$

3. fuzzy アルゴリズム [2]

あいまいな量の処理は、普通のアルゴリズムの一般化されたものとして見ることができるので、それを、fuzzy アルゴリズムと呼ぶことにする。

まず、はじめに、fuzzy アルゴリズムの一部分をなす fuzzy 命令の例を示すと

(a) 「もし x が "近似的に 5" に等しいならば y を近似的に 10 に等しくせよ。」

(b) 「もし x が "大きい" ならば、 y を several units 増大せよ。」

などである。(a)の場合を考えると、近似的に 5 に等しい数のあたりを fuzzy 集合 A とし、近似的に 10 に等しい数の集りを fuzzy 集合 B とすれば、 f_A, f_B によって (a) の意味は明確になる。

しかし、fuzzy 命令の意味の明確さより、それがどのようないくつかの問題を解決するわけではなし。そこでこのことを考えるための簡単な例として several steps 前へ移動せよ。をとりあげる。several steps の fuzzy 集合を A とし、 f_A を次のように仮定する。
 $f_A(0) = f_A(1) = f_A(2) = f_A(3) = 0, f_A(4) = 0.8, f_A(5)$
 $= f_A(6) = f_A(7) = 1, f_A(8) = 0.7, x \geq 9$ の $f_A(x) = 0$ 。

まず確率的な実行の場合を考えると、 x の遷移する確率は $f_A(x)$ に比例して、 $x=0, 1, 2, 3$ は確率 0, 4 は $0.8/4.5$, 5, 6, 7 は $1/4.5$, 8 は $0.7/4.5$ 9 以上は 0 の確率で遷移する。

この他、閾値を用いた場合は、 $f_A(x) \geq \alpha$ なる x の集合 A_α を考えると、 $\forall x \in A_\alpha$ は遷移可能である。この A_α に対し、上の確率的実行を用いても……し、特別な場合として、今を、 A_α が空集合にならなければ最大値をとることにすれば、 A_α は最大の membership 関数の値を持つ x の集合になる。

このような fuzzy 命令を考えることによって、普通のアルゴリズムが、Turing 機械と一一対応するなどとみて、可附番集合の前後関係の中で、正確に定義された

のと同じように, fuzzy アルゴリズムは, fuzzy Turing 機械と一対一対応するとして正確な意味が与えられる。即ち、時刻 n の状態を \bar{g}^n , 入力を u^n とする Turing 機械の状態遷移は

$$\bar{g}^{n+1} = f(\bar{g}^n, u^n)$$

で与えられ, fuzzy Turing 機械の場合は, membership 関数 $f_R(\bar{g}^{n+1}, \bar{g}^n, u^n)$ で特徴づけられた fuzzy 関係 R で表される。

4. fuzzy 集合の応用

4.1 fuzzy オートマトン [2][3]

fuzzy オートマトンは quintuple (I, V, Q, f, g) で表される。 I, V, Q はそれぞれ入力, 出力, 内部状態で f は $Q \times I \times Q$ の中の fuzzy 集合の membership 関数, g は $V \times I \times Q$ の中の fuzzy 集合の membership 関数である。即ち

$$f_A(\bar{g}_k, i_j, \bar{g}_m) = f\{\bar{g}(k) = \bar{g}_k, i(k) = i_j, \bar{g}(k+1) = \bar{g}_m\}.$$

ここで、入力 i_j が "来た" ときに、状態が \bar{g}_k から \bar{g}_m へ遷移するか "ありえない" か "どうか" の決定は次の通りに行う。 $0 < \alpha, \beta < 1$

1) $f_A(\bar{g}_k, i_j, \bar{g}_m) \geq \alpha$ ならば "存在"

2) $f_A(\bar{g}_k, i_j, \bar{g}_m) \leq \beta$ ならば "不存在"

3) $\beta < f_A(\bar{g}_k, i_j, \bar{g}_m) < \alpha$ ならば "未決定"。

ある特定の入力 i_j に関する fuzzy 遷移行列を

表1とすると、全体の
fuzzy遷移表は

表2のようになる。

但し、行列 $[A]$ の方の
要素は $f(v_j, a, g_i)$
である。

特定の n の入力系列

に対する遷移行列は

積空間 $T_1 \times \cdots \times T_n =$

における (n) fuzzy 関係
により定義される。即ち

$I_n(k)$ は n の入力系列

$i(k), i(k+1), \dots, i(k+n-1)$

を表すとすれば、

$f_A(g_e, I_n(k), g_s)$

$= f_A(g_e, i(k), \dots, i(k+n-1), g_s)$

となる。ニニテ P. 3
で述べた 2 つの fuzzy 関係の合成を用いれば、 $n=2$ の時

$$f_A(g_e, I_2(k), g_s) = f_A(g_e, i(k), g_m; g_m, i(k+1), g_r)$$

$$= \max_{g_m \in Q} \min \{ f_A(g_e, i(k), g_m), f_A(g_m, i(k+1), g_r) \}$$

一般に

$$f_A(g_e, I_n(k), g_s) = \max_{g_o, g_p, \dots, g_r} \min \{ f_A(g_e, i(k), g_o),$$

$$f_A(g_o, i(k+1), g_p), \dots, f_A(g_r, i(k+n-1), g_s) \}$$

[例]

入力 i, l に対する fuzzy 遷移行列を表 3 とする。

$$f_A(f_3, i_1, f_2) = f_{32}$$

$$f_A(f_3, i_1^2, f_2) = \max_{f_x} \min [f_A(f_3, i_1, f_x), f_A(f_x, i_1, f_2)] \\ = \max \{ \min [f_{31}, f_{12}], \min [f_{32}, f_{22}], \min [f_{33}, f_{32}], \min [f_{34}, f_{42}] \}$$

となる。

以上が "fuzzy
オートマトンの概略
である" として、

$g(k)$	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}
q_2	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}
q_3	f_{31}	f_{32}	f_{33}	f_{34}
q_4	f_{41}	f_{42}	f_{43}	f_{44}

" f_A が 0 や 1 の値

表-3

(かたはず、しかも、行列 $[A]$, $[B]$, ..., $[A_0]$, $[B_0]$, ... の各行
は 1つだけ 1で 他の 0 であるとすれば、この fuzzy
オートマトンは 普通の決定オートマトンになる。また
各行の和が 1 になるように 正規化された fuzzy
オートマトンは、確率オートマトンと同じ形になる。

4.2 学習システムへの応用 [3]

ここでの学習システムは、パターン認識における学習識別を考える。決定機構としては、membership 関数の最大値選択を基礎とする。即ち、 $\Omega = \{w_i; i=1, \dots, R\}$ をパターンクラスの集合とし、入力 x が クラス w_i を含む度合を $f_{w_i}(x)$ で表すと

$$f_{w_k}(x) = \max_i f_{w_i}(x)$$

の時、 $x \in w_k$ と該定される。もし、"未決定" の態度が許されるならば、 $\max_i f_{w_i}(x) \geq C$ の時だけ、決定されるようにはすれば、ある信頼度に達するまでは、ランダム

な手法が使用できる。

次に、 n -状態数 fuzzy オートマトンの学習機構 及び
その収束性について述べる。 $\hat{f}_j(k)$ を、時刻 k に、オ-
トマトンが状態 θ_j にある membership 関数、 $f_{ij}^\ell(k)$ を
 $f_{ij}^\ell(k) = f\{\theta(k) = \theta_i, \bar{I}(k) = \bar{i}, \theta(k+1) = \theta_j\}$

とする。

$$\hat{f}_j(k+1) = \max_m \min \{ \hat{f}_m(k), f_{mj}^\ell(k) \}$$

ここで、前述の定常的 fuzzy 遷移行列を非定常に
するとして、学習性が与えられるが、簡単な例を次に示す。

$$f_{mj}^\ell(k) = f_{jj}^\ell(k-1) ; \text{ 但し } m \neq j \text{ のとき}$$

$$f_{jj}^\ell(k) = \alpha_j f_{jj}^\ell(k-1) + (1 - \alpha_j) \lambda_j$$

$$0 < \alpha_j < 1, 0 < \lambda_j \leq 1, j=1, \dots, n$$

この場合、学習部分を図 2 ようにすると収束性は次に
示される。 $k \rightarrow \infty$ のとき

$$\text{まず } \hat{\lambda}_j(k) \rightarrow \hat{\lambda}_j$$

$$\text{従って } \hat{\lambda}_{ij}^\ell(k) \rightarrow \hat{\lambda}_j$$

$$\text{かつ } \min \{ \hat{f}_m(k) \} \leq \lambda_j \leq \max \{ \hat{f}_m(k) \} \quad T_2 \text{ にて}$$

$$\hat{\lambda}_j = \max_m \min [\hat{f}_m(k), \hat{\lambda}_j] = \min_m \max [\hat{f}_m(k), \hat{\lambda}_j]$$

$$\text{従って } \hat{f}_j(k) \rightarrow \hat{\lambda}_j$$

しかし、この証明は
「収束すれば収束

する」という論理で
不十分である。

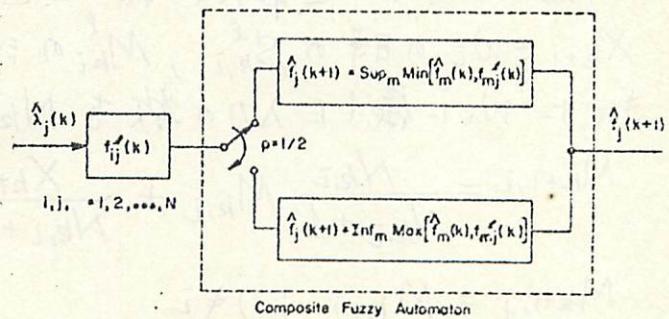


図 2

Learning section.

4.3 ハーベン識別への応用例

図3は教師Tとして
学習するパターン認識系
である。決定機構は
複数個の識別閾数を
持ち、ある評価基準に
従って最適の識別閾
数を見つけて、その答を
採用する。

今、 $\Omega = \{w_i : i=1 \dots R\}$
をハーベンクラスの集合、

X_1, X_2, \dots を入力系列、

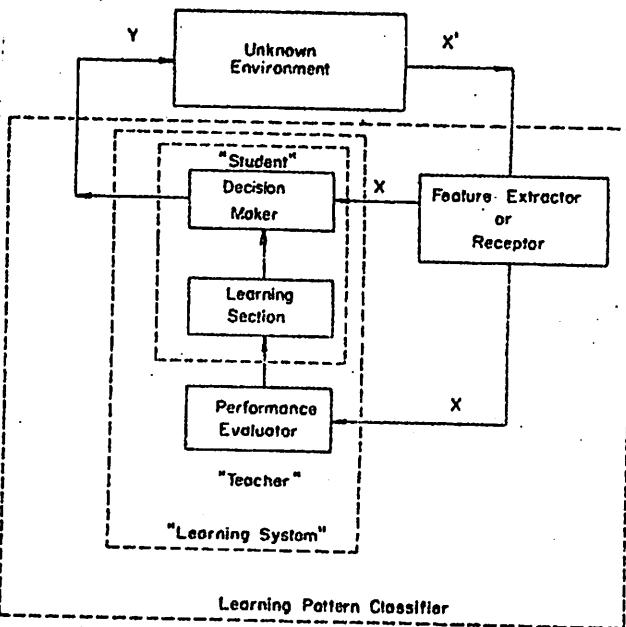


図3

Learning pattern classifier.

あらかじめ与えられた識別閾数の数 N とする。また、時刻 k において i 番目の識別閾数に関する、 i 番目のクラスの標本平均；標本分散を M_{ki}^l, S_{ki}^l 、評価を K_k^l とすると、

$$K_k^l = \left| w_1 \left[\sum_{i=1}^R S_{ki}^l \right] - w_2 \left[\sum_{i>j} (M_{ki}^l - M_{kj}^l)(M_{ki}^l - M_{kj}^l) \right] \right|$$

即ち、評価は、標本分散の和を最小化し、標本平均間の距離の2乗和を最大化することを基礎にしている。

$X_{k+1} \in w_i$ の時の $S_{k,i}^l, M_{k,i}^l$ の漸化式は、時刻 k まで $i = w_i$ に属して入力の数を $N_{k,i}$ として

$$M_{k+1,i} = \frac{N_{k,i}}{N_{k,i} + 1} M_{k,i} + \frac{X_{k+1}}{N_{k,i} + 1}$$

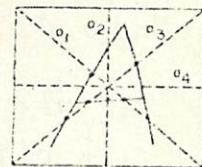
$$M_{k+1,j} = M_{k,j}; j \neq i$$

$$S_{k+1,i} = \frac{N_{ki}}{N_{ki} + 1} S_{ki} + \frac{N_{ki}}{(N_{ki} + 1)^2} (X_{k+1} - M_{ki})' (X_{k+1} - M_{ki})$$

$$S_{k+1,j} = S_{k,j} \quad j \neq i$$

そして、 $\{K_k^l ; l=1, \dots, N\}$ の中の最小のものが、 N の識別関数の中から最適のものを与える。

次に、英文字 A と B を識別する場合の例を示す。
特徴抽出図は図 4 のようだ
もので、 X_i は直線 a_i と $11^{\circ}4^{\circ}-$
との交点の数を示す。時刻 t_1 に
あける、 N の membership 関数
 $\hat{\lambda}_j(k)$ は $\hat{\lambda}_j(k) = 1 - \frac{K_k^j}{C} ; j=1, 2, \dots, N$



Sample Feature $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [3232]$

Description of feature extraction.

$$\text{但し, } C \geq \max_{K_j} K_j^j, \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_j(k) = \hat{\lambda}_j$$

である。図 5 は、識別関数を 10 用ひ、 BO ユーブラの
訓練用データで計算機シミュレーションを行なつて
ある。

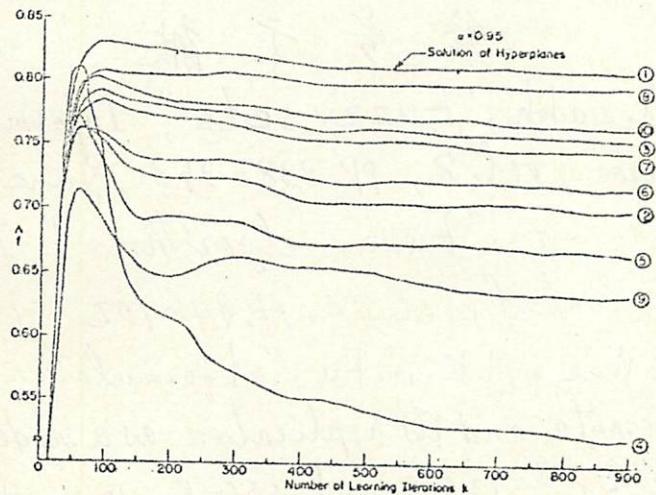


図 5 λ versus k for two-class pattern classification problem.

5. おわりに

fuzzy 集合は、その membership 関数を 0 と 1 に限れば、普通の集合にならざりからぬようだ。集合概念の一般化であり、従って、fuzzy オートマトンは、普通の決定オートマトンや確率オートマトンの一般化である。その為、理論展開が、従来のものと似よることは避けられぬか。ここで述べた Wae and Fu の 1197-ニ認識への応用によるもので、fuzzy オートマトンよりも、むしろ従来の統計的手段にあらずとも考えられ、まだ十分に fuzzy 集合の概念を生かした應用とは言えない。その点で、既成の意味の拡張といふことにどうゆけば、fuzzy 集合の概念だけを原点にした、独自の展開が望まれる。

以上にせよ、このような fuzzy 向きを扱うとき、その扱い方が fuzzy にならないように気をつけなければならぬ。

参考文献

- [1] L.A.Zadeh, "Fuzzy sets," *Information and Control*, vol. 8, pp. 338~353, June 1965.
- [2] ———, "Fuzzy algorithms," *Information and Control*, vol. 12, pp. 94~102, 1968
- [3] W.G.Wae and K.S.Fu, "A formulation of fuzzy automata and its application as a model of learning system," *IEEE, vol. SMC-5, no. 3, July 1969*